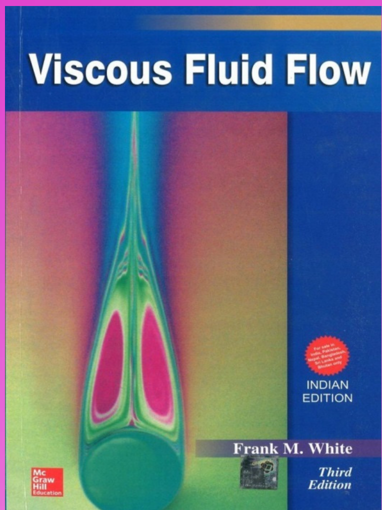


مکانیک سیالات پیشرفته

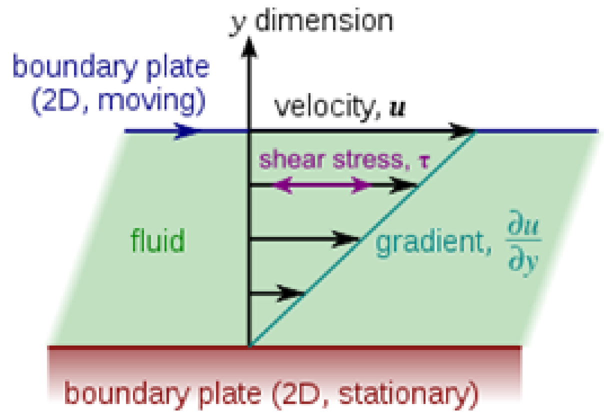
دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک

فصل سوم: جریان های داخلی آرام و حل های تحلیلی دقیق در مکانیک سیالات جریان آرام – بخش پنجم

کلاس درس دکتر نوروزی
خرداد ۱۴۰۰

جریان کوئت غیر دائمی:

در جریان کوئت غیر دائمی، فرض بر آن است که سیال بین دو صفحه ساکن قرار داشته و در زمان t=0، صفحه بالایی با سرعت ثابت U به حرکت در می آید.



$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ at : y = 0 \rightarrow u = 0 \\ at : y = h \rightarrow u = U \\ at : t = 0 \rightarrow u = 0 \end{cases}$$

چون شرایط مرزی ناهمگن است، نیاز به همگن کردن آن داریم:

$$u = v + u_q$$

$$u_q = Ay + B \rightarrow \begin{cases} at: y = 0 \rightarrow u_q = 0 \\ at: y = h \rightarrow u_q = U \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{U}{h} \rightarrow u_q = U\dfrac{y}{h} \\ B = 0 \end{cases}$$

برای v داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ at: y = 0 \rightarrow v = 0 \\ at: y = h \rightarrow v = 0 \\ at: t = 0 \rightarrow v = -u_q = -\dfrac{Uy}{h} \end{cases}$$

چون در **t=0** داریم $\begin{cases} u = 0 \\ u = v + u_q \end{cases}$ و

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$v = T(t) Y(y)$$

$$\rightarrow \dot{T} Y = \nu T Y'' \rightarrow \frac{\dot{T}}{\nu T} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0 \rightarrow Y(y) = A \cos \lambda y + B \sin \lambda y$$

$$\begin{cases} at: y = 0 \rightarrow v = 0 \Rightarrow A = 0 \\ at: y = h \rightarrow v = 0 \Rightarrow B \sin \lambda h = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{n\pi}{h} \end{cases}$$

$$\rightarrow Y(y) = B \sin \frac{n \pi y}{h}$$

$$\dot{T} + \lambda^2 \nu T = 0 \rightarrow T(t) = C \exp(-\lambda^2 \nu t)$$

$$v_n(t,y) = a_n \exp(-\lambda^2 \nu t)\sin\frac{n\pi y}{h}$$

$$\rightarrow v(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-\lambda^2 \nu t)\sin\frac{n\pi y}{h}$$

$$\xrightarrow{at:t=0:v=-U\frac{y}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi y}{h} = -U\frac{y}{h}$$

$$a_n = \frac{2}{h}\int_0^h -U\frac{y}{h}\sin\frac{n\pi y}{h}dy = \frac{-2U}{h^2}\int_0^h y\sin\frac{n\pi y}{h}dy$$

$$\int_0^h y\sin\frac{n\pi y}{h}dy \Rightarrow \begin{cases} u = y \\ \sin\frac{n\pi y}{h}dy = dv \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dy \\ v = \frac{-h}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{h} \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_0^h y \sin\frac{n\pi y}{h}dy = \left[\frac{-hy}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{h}\right]_0^h + \frac{h}{n\pi}\int_o^h \cos\frac{n\pi y}{h}dy$$

$$\rightarrow \int_0^h y \sin\frac{n\pi y}{h}dy = \left[\frac{-hy}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{h}\right]_0^h + \frac{h}{n\pi}\int_o^h \cos\frac{n\pi y}{h}dy = \frac{-h^2}{n\pi}\cos n\pi = \frac{-h^2(-1)^n}{n\pi}$$

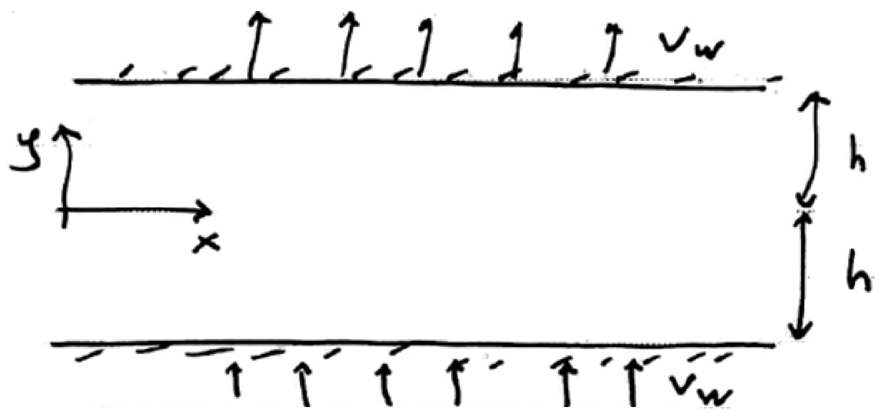
$$\rightarrow a_n = \frac{2U(-1)^n}{n\pi}$$

در نهایت، برای u داریم:

$$u = v + u_q$$

$$u = \frac{Uy}{h} + \frac{2U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\exp(-\frac{n^2\pi^2}{h^2}\nu t)\sin\frac{n\pi y}{h}$$

جریان توسعه یافته بین دو صفحه دارای مکش و دهش:



$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\[2ex] \rho(u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y})=-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\mu(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2})\\[2ex] \rho(u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y})=-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\mu(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2})\end{cases}$$

از معادله پیوستگی :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \text{از طرفی :} \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases} \rightarrow v=c$$

$$at: \begin{cases} y=-h \rightarrow v=v_w \\ y=+h \rightarrow v=v_w \end{cases} \Rightarrow c=v_w \rightarrow v=v_{wall}$$

$$y-momentum \rightarrow \frac{\partial p}{\partial y}=0 \rightarrow p \neq p(y) \rightarrow p=p(x)$$

$$x-momentum \rightarrow \rho v_w \frac{du}{dy}=-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\mu\frac{d^2u}{dy^2}-\rho v_w\frac{du}{dy}=\frac{dp}{dx}$$

$$\mu r^2 - \rho v_w r = 0 \rightarrow r(\mu r - \rho v_w) = 0 \rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \dfrac{\rho v_w}{\mu} \end{cases}$$

جواب عمومی : $\Rightarrow u_g = C_1 e^0 + C_2 e^{\frac{\rho v_w}{\mu} y} = C_1 + C_2 e^{\mathrm{Re}\frac{h}{y}}$

عدد رینولدز دیواره به صورت $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho v_w h}{\mu}$ تعریف شده است.

جواب خصوصی : $\Rightarrow u_p = By + C$

$$\rightarrow \mu \times 0 - \rho v_w B = \frac{dp}{dx} \rightarrow B = \frac{-1}{\rho v_w} \frac{dp}{dx}$$

$$u = u_g + u_p$$

$$\Rightarrow u = C_1 + C_2 e^{\mathrm{Re}\frac{y}{h}} - \frac{1}{\rho v_w}\frac{dp}{dx} y$$

$$\left.\begin{aligned}
&(*) at: y = -h \xrightarrow{u=0} C_1 + C_2 e^{-\mathrm{Re}} + \frac{h}{\rho v_w}\frac{dp}{dx} = 0 \\
&(**) at: y = h \xrightarrow{u=0} C_1 + C_2 e^{\mathrm{Re}} - \frac{h}{\rho v_w}\frac{dp}{dx} = 0
\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(*)-(**)} C_2 (e^{\mathrm{Re}} - e^{-\mathrm{Re}}) = \frac{2h}{\rho v_w}\frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow C_2 = \frac{h}{\rho v_w \sinh(\mathrm{Re})}\frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{h}{\rho v_w}\frac{dp}{dx} - \frac{h}{\rho v_w \sinh(\mathrm{Re})}\frac{dp}{dx} e^{\mathrm{Re}}$$

$$\Rightarrow u = \frac{h}{\rho v_w}\frac{dp}{dx} - \frac{h}{\rho v_w \sinh(\mathrm{Re})}\frac{dp}{dx} e^{\mathrm{Re}} + \frac{h}{\rho v_w \sinh(\mathrm{Re})}\frac{dp}{dx} e^{\mathrm{Re}\frac{y}{h}} - \frac{h}{\rho v_w}\frac{dp}{dx}\frac{y}{h}$$

برای ماکزیمم سرعت جریان بین دو صفحه موازی غیر متخلخل داریم:

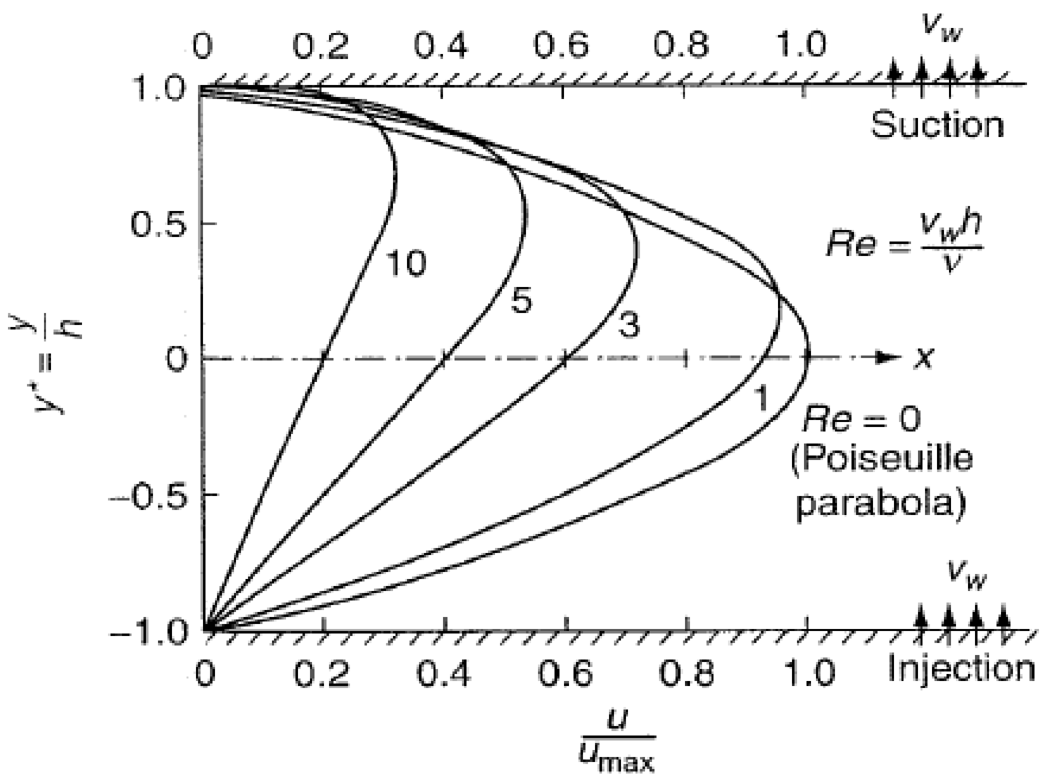
$$u_{\max} = \frac{-h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$\xrightarrow{\times\frac{\rho v_w}{h}} u_{\max}\frac{\rho v_w}{h} = \frac{-h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{\rho v_w}{h} = \frac{-\mathrm{Re}}{2}\frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{-2}{\mathrm{Re}}u_{\max} = \frac{h}{\rho v_w}\frac{dp}{dx}$$

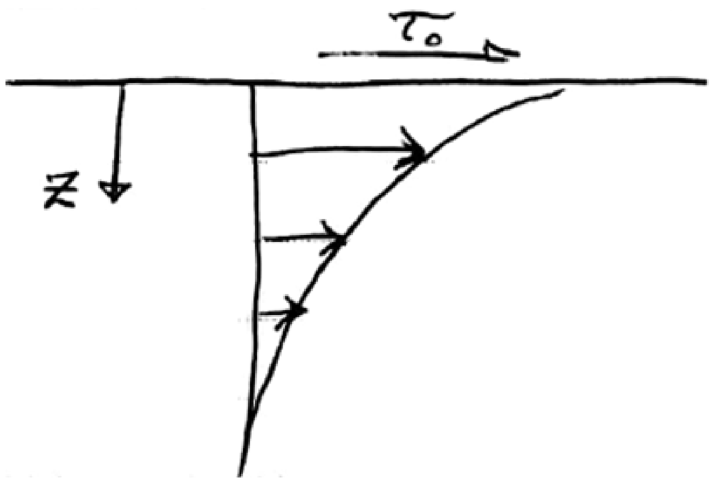
با جایگذاری مقدار فوق در معادله داریم:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{y}{h} - 1 + \frac{e^{\mathrm{Re}} - e^{\mathrm{Re}\frac{y}{h}}}{\sinh(\mathrm{Re})}\right)$$



کاهش دبی جریان، در اثر ازدیاد رینولدز دیواره، تغیر پروفیل و ازدیاد تنش برشی دیواره است.

جریان روی سطح سیال دراثر وزش باد:



روی سطح : $\mu \dfrac{\partial u}{\partial z} = \tau_0$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_0}{\mu} = k$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, u = u(t,z) \\ at: t = 0 \rightarrow u = 0 \\ at: z = 0 \rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial z} = k \\ at: z \rightarrow \infty : u = 0 \end{cases}$$

برای حل از تبدیل لاپلاس استفاده می کنیم:

$$\mathcal{L}\{u(t,z)\} = U(s,z)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU - u(0,z) = sU$$

با اعمال تبدیل به معادله حاکم، داریم:

$$sU = \nu \frac{d^2U}{dz^2}$$

$$\frac{d^2U}{dz^2} - \frac{s}{\nu}U = 0 \xrightarrow{r=\pm\sqrt{\frac{s}{\nu}}} U = A\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\nu}}z\right) + B\exp\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}}z\right)$$

از آنجا که در $z \to \infty$ تابع باید میرا شود، پس:

$$B = 0 \Rightarrow U = A\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\nu}}z\right)$$

از شرط مرزی تبدیل می گیریم:

$$at: z=0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z}=k \rightarrow \frac{dU}{dz}(s,0)=\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\right\}_{z=0}=\frac{k}{s}$$

$$\frac{dU}{dz}(s,0)=\frac{k}{s} \rightarrow -\sqrt{\frac{s}{\nu}}A=\frac{k}{s}$$

$$U=-\frac{k\sqrt{\nu}}{s\sqrt{s}}\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\nu}}z\right)$$

یادآوری (مفهوم کانولوشن):

$$H(s) = F(s)G(s)$$

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$$\begin{cases} F(s) = \dfrac{-k\sqrt{\nu}}{s} \rightarrow f(t) = -k\sqrt{\nu} = cte \\ G(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s}}\exp\left(-\sqrt{s}\,\dfrac{z}{\sqrt{\nu}}\right) \end{cases}$$

از جدول تبدیلات داریم:

$$\mathcal{L}\left\{\exp\left(\frac{-a^2}{4t}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right\} = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

بنابراین $a = \frac{z}{\sqrt{\nu}}$ باشد و لذا داریم:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp(\frac{-z^2}{4t\nu})$$

و لذا با توجه به تعریف کانولوشن، خواهیم داشت:

$$u(t,z) = \int_0^t \frac{-k\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi\tau}} \exp(\frac{-z^2}{4\tau\nu}) d\tau$$

در نهایت، با محاسبه انتگرال فوق خواهیم داشت:

$$\frac{u}{k} = -z\left[1 + erf\,(\frac{-z}{2\sqrt{\nu t}})\right] + 2\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} \exp(-\frac{z^2}{4t\nu})$$

راه حل جایگزین برای جریان روی سطح سیال در اثر وزش باد (صفحه ۷۰ جزوه)

یک راه حل جایگزین ساده تر برای این مساله وجود دارد. معادله حاکم و شرایط این مساله عبارتند از:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\quad u=u(t,z)$$
$$at\ \ z=0\longrightarrow\frac{\partial u}{\partial z}=K \qquad (۱)$$
$$at\ \ z\to\infty\longrightarrow u=0$$
$$at\ \ t=0\longrightarrow u=0$$

چنانچه از معادله حاکم نسبت به z مشتق بگیریم، داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\ \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial z}}\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\nu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad (۲)$$

با فرض $f=\frac{\partial u}{\partial z}$ ، می توانیم معادلات زیر را ایجاد کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad f=f(t,z)$$
$$at \;\; z=0 \longrightarrow f=K$$
$$at \;\; z\to\infty \longrightarrow f=0 \qquad (۳)$$
$$at \;\; t=0 \longrightarrow f=0$$

باید توجه داشت که در زمان صفر و یا مکان بینهایت، نه تنها u بلکه کلیه مشتقات مکانی آن صفر هستند (مثلا مقدار مشتق اول نیز صفر است: $\frac{\partial u}{\partial z}=0$). معادله (۳) دقیقا مساله اول استوکس است و برای پاسخ آن داریم:

$$f=\frac{\partial u}{\partial z}=K\left[1-erf\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right] \qquad (۴)$$

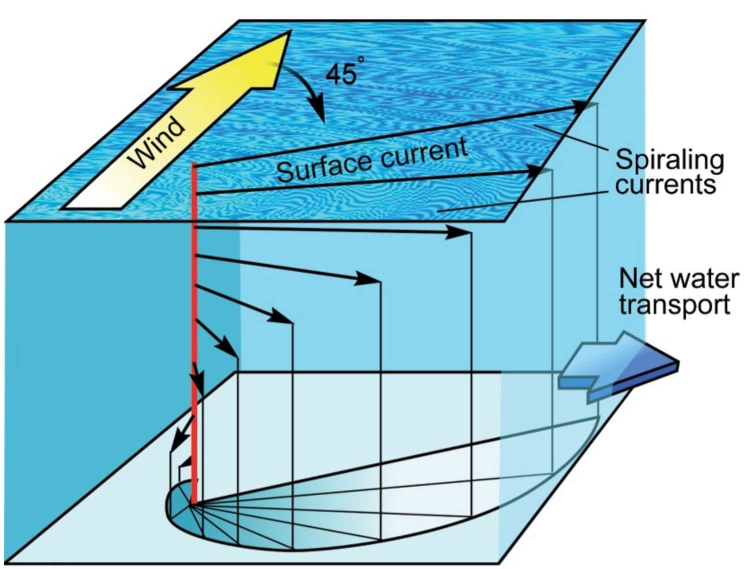
در نهایت با انتگرال گیری از رابطه (۴)، داریم:

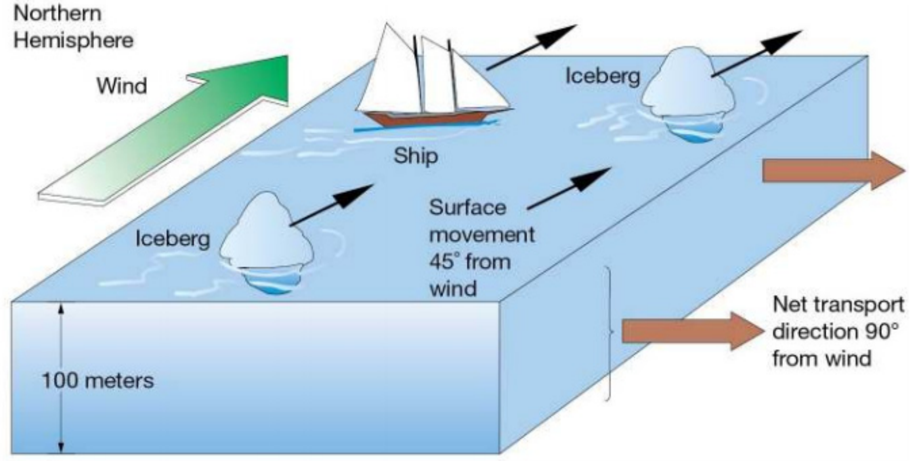
$$\frac{u}{K}=-z\left[1-erf\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right]+2\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}\,exp\left(\frac{-z^2}{4\nu t}\right) \qquad (۵)$$

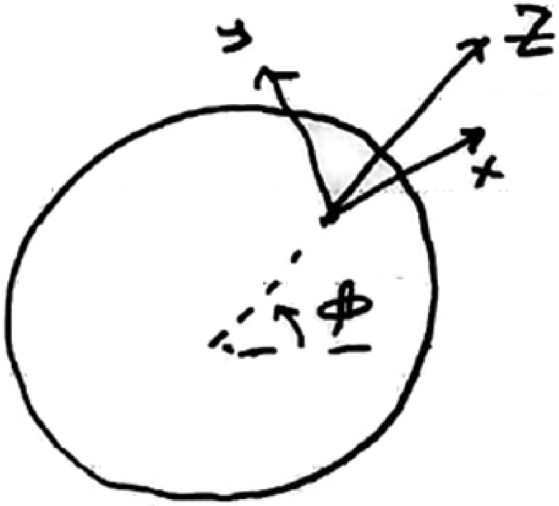
ثابت انتگرال گیری فوق با این فرض بدست آمده که در $t=0$ و $z=0$ بایستی سرعت صفر باشد (ثابت مذکور صفر است).

اثر کوریولیس (مارپیچ اکمن):

در سال 1902، نانسن (Nansen) دریافت که جهت حرکت یخ های شناور در شمال بین 20 درجه تا 40 درجه نسبت به جهت وزش باد انحراف دارد. وی به درستی نتیجه گرفت که علت این امر، شتاب کوریولیس کره زمین است.

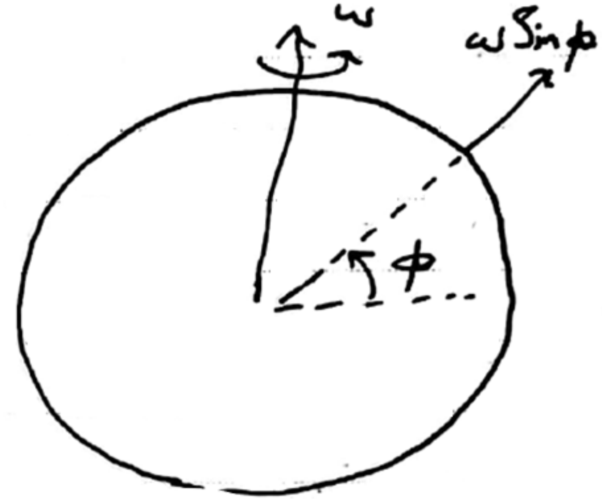






φ : عرض جغرافیایی

ω : سرعت زاویه ای چرخش زمین



فرض کنیم که xyz یک دستگاه مختصات روی سطح کره زمین در عرض جغرافیایی ϕ باشد که x به سمت شرق، y به سمت شمال و z عمود بر کره زمین است.

$$\vec{\omega} = (0, \omega\cos\phi, \omega\sin\phi)$$

$$\vec{v} = (u, v, 0)$$

$$2\vec{\omega} \times \vec{v} = \nu\nabla^2\vec{v}$$

$$2\vec{\omega}\times\vec{v}=\nu\nabla^2\vec{v}=-2\omega v\sin\phi\hat{i}+2\omega u\sin\phi\hat{j}+2\omega u\cos\phi\hat{k}$$

معادلات ناویر استوکس:

$$\begin{cases}-2\omega v\ \sin\phi=\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\ 2\omega u\sin\phi=\nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\end{cases}$$

به طور خلاصه، معادله به فرم مختلط زیر قابل بازنویسی است:

$$\nu\frac{d^2}{dz^2}(u+iv)-2i\,\omega\sin\phi(u+iv)=0$$

$$\begin{cases} u'' = -\dfrac{2\omega}{\nu}\sin(\phi)v \\ v'' = \dfrac{2\omega}{\nu}\sin(\phi)u \end{cases} \qquad \begin{cases} u = f_1 \\ u' = f_2 \\ v = f_3 \\ v' = f_4 \end{cases} \qquad a = \frac{2\omega}{\nu}\sin\phi$$

$$\begin{aligned} f_1' &= f_2 \\ f_2' &= -af_3 \\ f_3' &= f_4 \\ f_4' &= af_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{a} \\ \lambda_{3,4} = \pm\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{a} \end{cases}$$

جواب های غیر تکین معادله فوق عبارتند از:

$$u = A\exp\left(\sqrt{\frac{a}{2}}z\right)\cos\left(\sqrt{\frac{a}{2}}z + \phi\right)$$

$$v = B\exp\left(\sqrt{\frac{a}{2}}z\right)\cos\left(\sqrt{\frac{a}{2}}z + \phi'\right)$$

فرض کنیم که یک جریان باد از جهت جنوب به شمال (در جهت y) در جریان باشد.

پس :

$$at: z = 0 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{du}{dz} = 0 \\ \dfrac{dv}{dz} = k = \dfrac{\tau_0}{\mu_{water}} \end{cases}$$

همچنین:

$$at: z \to -\infty \Rightarrow u, v = 0$$

که شرط فوق با صرف نظر از ترم های سینگولار در پاسخ، اعمال شده است.

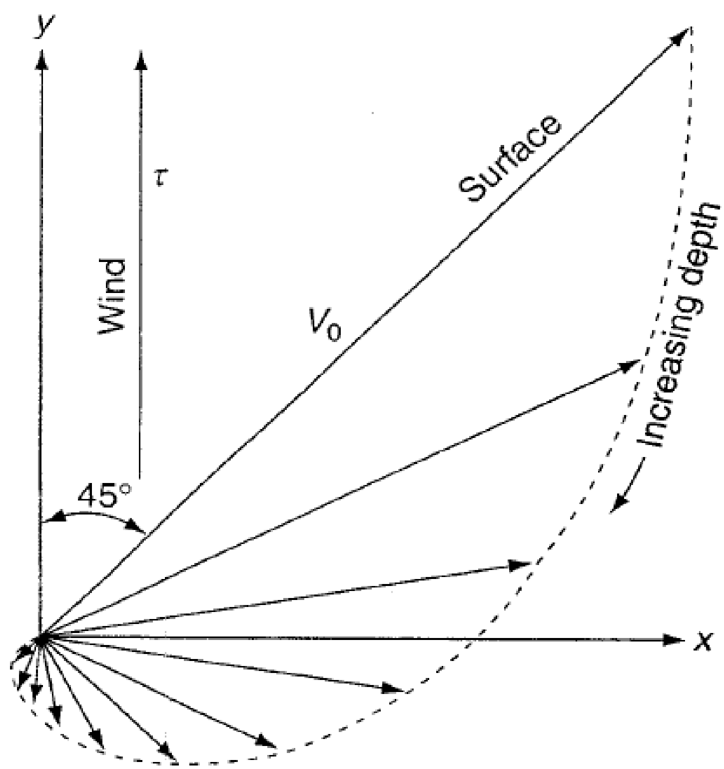
با اعمال شروط، داریم:

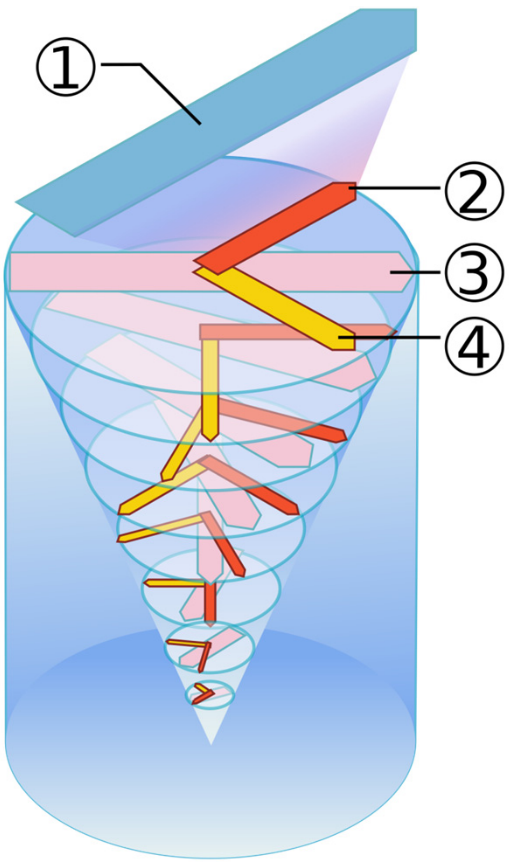
$$\begin{cases} u = v_0 \exp(\frac{\pi z}{D}) \cos(\frac{\pi z}{D} + 45^\circ) \\ v = v_0 \exp(\frac{\pi z}{D}) \sin(\frac{\pi z}{D} + 45^\circ) \end{cases}$$

در رابطه فوق، v_0 سرعت سطح آب و D فاصله اثر زوال عمودی است.

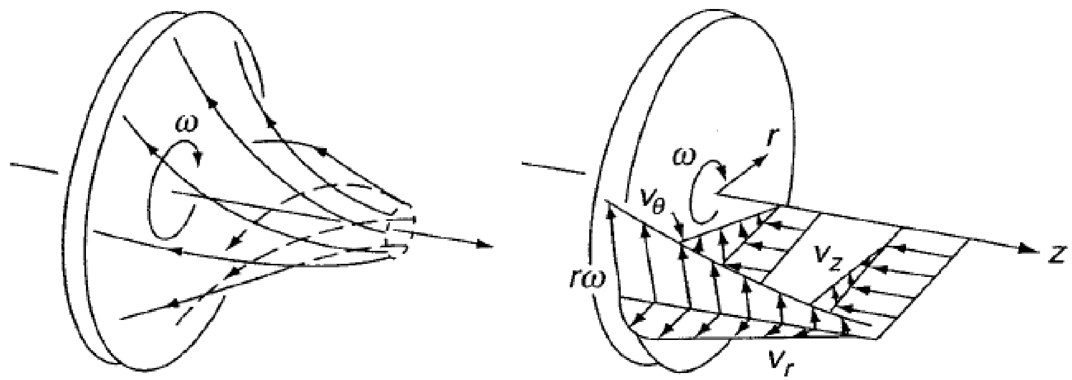
$$v_0 = \frac{\tau_0 / \rho}{\sqrt{2\omega\nu \sin\phi}}, D = \pi\sqrt{\frac{\nu}{\omega \sin\phi}}$$

مطابق رابطه فوق، در اثر شتاب کریولیس کره زمین، جریان آب در سطح زمین به اندازه 45 درجه نسبت به راستای وزش باد تغییر می کند. همچنن، با ازدیاد عمق راستای جریان دچار چرخش شده و یک مارپیچ رو به زوال را ایجاد می کند. نکته جالب آن است که در عمق مشخصی، جریان برخلاف جهت وزش باد است.

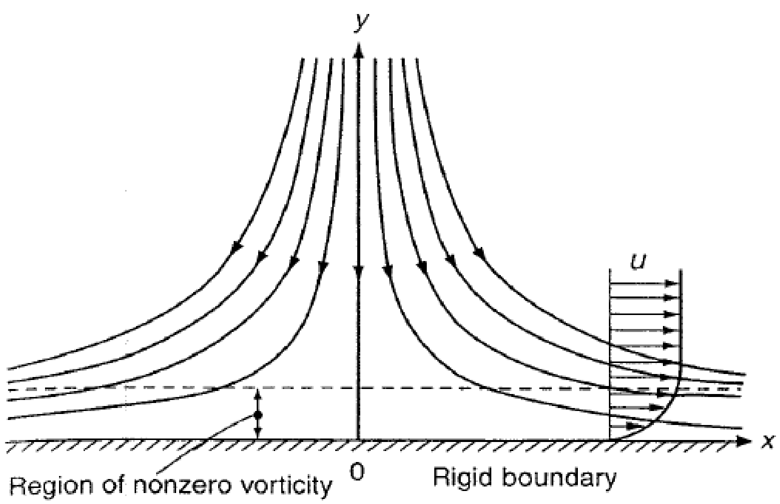




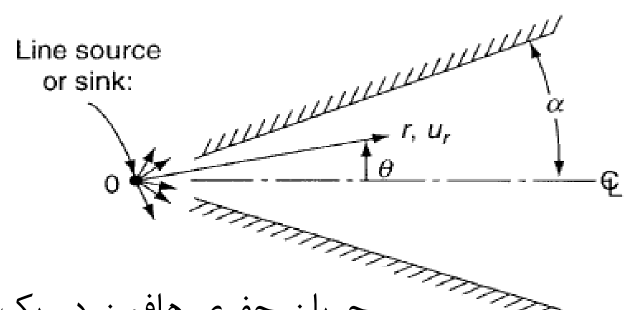
تاکنون پاسخ های متشابه دیگری نظیر جریان در نزدیکی نقطه سکون، جریان در نزدیکی یک دیسک گردان و جریان جفری هافمن در یک گوشه، ارائه شده است (مطالعه بر عهده دانشجو).



جریان حول یک دیسک گردان



جریان در نزدیکی نقطه سکون



جریان جفری هافمن در یک گوشه


The End